CDOの紹介

本稿は、CDO に関する簡単な説明とそれに関する問題点や研究対象についての説明を行う。

近年、クレジット・デリバティブに関するマーケットは、急速に拡大していた。サブプライム危機以降、残高は (ポジションの解消などにより) 減少したが、それでもクレジット・デリバティブの残高は多額であり、モデルやシミュレーション方法の改善は重要な問題であると考えられる。

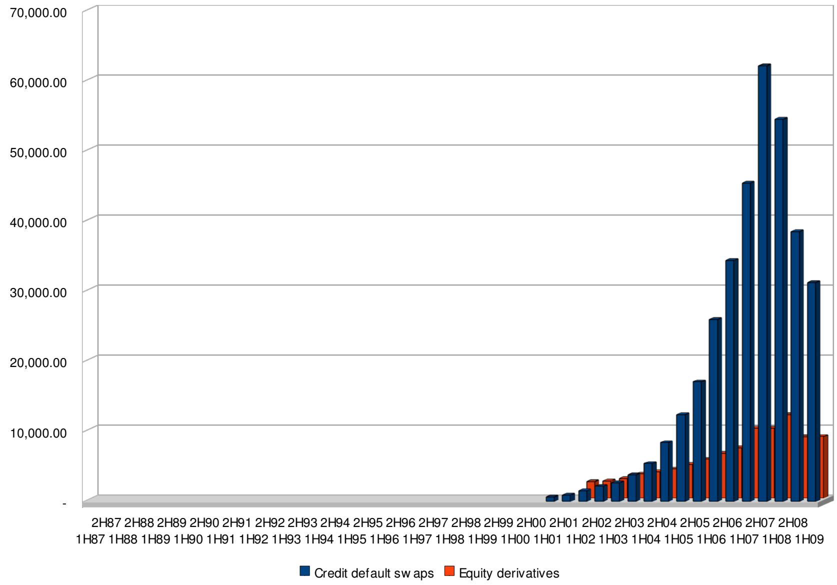


Figure 1: CDS 残高の推移（想定元本、10 億米ドル、semiannual, all surveyed contracts）

1　信用リスクとは

信用リスク（クレジット・リスク）とは、財務状態の悪化などの原因で債務者の資産価値が低下もしくは消失することにより、債務者が債務を履行できなくなる可能性によって生じるリスクのことである。必ずしもデフォルトが起きた場合に

のみ信用リスクが発生するわけではないことに注意する。すなわち、債権の受け取りの可能性が低くなった時点で信用リスクは発生していると考えられる。

2　信用リスクを用いた金融派生商品

ここでは、クレジット・デリバティブに関する説明を記す。

債務者が債務を履行できなくなることをデフォルト[1]という。デフォルトが起きた場合、将来に予定されたキャッシュフローを受け取ることができなくなり、債権者（銀行などの金融機関や社債や株などを保有する投資家）は、損失を被ることになる。近年、信用リスクを内包する金融商品を保有している場合、金融機関に対してＢＩＳ規制により、信用リスク計測が義務付けられている。信用リスク計測を行うために、債務者がデフォルトする確率を推定する必要がある。この確率のことをデフォルト確率、または倒産確率という。

2.1　クレジットデリバティブ

企業のデフォルト・リスクを取引する金融派生商品のことをクレジット・デリバティブという。通常のデリバティブとは異なり、価格付けには、市場リスクと信用リスクを考慮しなければならない。主に、信用リスク[2]を他に移転したい主体と信用リスクを引き受けたいと考える主体の間で取引される。取引動機としては、以下のような目的が挙げられる：

- 債券などの信用リスクから逃れられない商品を保有する企業が信用リスクをヘッジすることを目的として取引を行う。

- 社債や担保債から構成されるポートフォリオ[3]のリスクを分散させる目的で

---

[1]クレジット・デリバティブにおけるデフォルトの定義は、以下の３つが一般的である：

1. Bankruptcy：倒産や破産, 債務超過など
2. Failure to Pay：債務不履行
3. Restructuring：債務の条件変更 (元本の減額など)

クレジット・イベント（信用事由）は合わせて 3CE と呼ばれる。特に、1）と 2）の場合は 2CE と呼ばれる。

[2]市場リスクとは、分散投資（diversification）で除去できないシステマティックなリスクを指し、マーケットで観測可能な金利リスク、為替リスク、株式リスクなどがある。市場性のある取引には市場リスクがあるので、債券やＣＤＳにも市場リスクが存在する。カウンターパーティ・リスクとは相対取引（OTC）において、取引相手がデフォルトすることで契約上の支払が行われず損害が発生する信用リスクである。つまり、デフォルト発生以後は、キャッシュフローの受け/払いはないので、その時点での時価評価で当方に益が出ている場合だけが問題となる（行使価格０のオプション）。一方、取引所でなされる市場取引では、証拠金（マージン・コール）などの仕組みが整備されており、決済機関がデフォルトする可能性は考慮されないので、信用リスクは存在しない。将来デフォルトする可能性のある債券の割引金利（ディスカウント・レート）は、デフォルト・フリーの無リスク金利にリスク・プレミアムが加算されたものであるが、このリスク・プレミアムは信用リスクと流動性リスクの対価である。流動性リスクとは、取引量が極端に少ない銘柄や市場の混乱時などに発生しやすいリスクである。つまり、金融商品の売買を行いたい時、即座に取引ができない状況に陥ったり、通常より不利な価格や金利での取引を余儀なくされることにより損失を被るリスクである。信用リスクと流動性リスクは関連があり、例えば、信用収縮の時期は流動性が枯渇することにより、双方のリスク・プレミアムが上昇する。

[3]Wikipedia 参照。

取引を行う。また、同格付け[4]の社債よりも利回りが高いため注目される場合がある。(通常、社債よりＣＤＳの方が流動性が高く、CDO は低い。)

- CDS と社債のスプレッドの乖離を利用した裁定取引。
- 信用リスクに対するの投資 (投機) 目的。

代表的なクレジット・デリバティブとしては、以下で紹介するクレジット・デフォルト・スワップ（Credit Default Swap ; 以下では、CDS と呼ぶ.）や債務担保証券 (Collateralized Debt Obligation; 以下では、CDO と呼ぶ。) などがある。また、債券（Bond）とローン（Loan）であることを識別するため、CBO や CLO ということがある。

2.1.1 CDS

CDS とは、クレジット・デリバティブの一種で、あらかじめ定められた参照資産にデフォルトなどのクレジット・イベントが起こった場合に契約で定められた支払いが発生する商品である。金利スワップなどとは異なり、一種の保険のような役割を果たす商品と考えることができるが、マーケットで売買することを前提とする。ただし、保険とは異なり損失額の査定がなく一定の条件が起これば必ず一定の支払いが発生する。ある (企業などの) 債権を保有する企業などは、その債権から発生する信用リスクからは逃れられない。このとき債権を保有する企業がその債権を移転することなく、当該債務者に知られずに、デフォルト・リスクをヘッジしたい場合に商品の買い手（プロテクションの購入者）となりうる。この場合、信用リスクは、買い手から売り手に移転する。通常の金利スワップなどにおけるキャッシュフローの受払というスタイルとは異なり、プロテクションの買い手は、売り手に満期までの各支払期日にあらかじめ決められたプレミアム（保険料に相当）を支払う。（通常は四半期ごとにプレミアムを支払う。）但し、参照組織のデフォルト発生時点まで支払う。プロテクションの売り手は、参照組織がデフォルトしない限り、買い手に何も支払わない。しかし、一旦 (契約期間の間に買い手と契約した) クレジット・イベント[5]が発生すると、買い手との契約に従って一定の条件の支払が発生する。

2.1.2 CDO

CDO とは、複数の銘柄の債権 (ローンや社債または、CDS) のアセット・プールを参照し、新たに生成される証券化商品のことである。貸付などのローン債権を参照資産として発行される CDO はキャッシュ型 CDO（cash CDO）と呼ばれ、クレジット・デフォルト・スワップ（CDS）のようなクレジット・デリバティブを参照して組成される CDO はシンセティック CDO（SCDO）と呼ばれる。現物債権を集める必要がないことから、SCDO は、キャッシュ型 CDO に比べて、組成が容易とされている。組成の主な理由としては、優先劣後構造による信用補完で、個々の構成銘柄の信用リスクが高くても相互の「相関」が低ければ、デフォルトによる損失発生のリスクをある程度軽減した投資が可能なこと。参照資産の

[4]金融危機の最中、急激に格下げされた CDO の格付など、格付機関の証券化商品に対する格付け付与のロジックが問題含みであることが明らかになった。
[5]参照：クレジット・デリバティブにおけるデフォルトの定義。

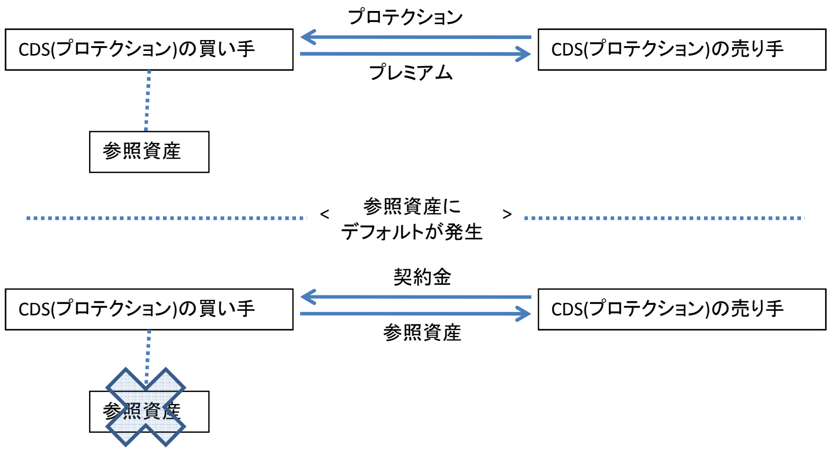


Figure 2: CDS の取引図式

信用リスクを投資家に転嫁することで BIS 規制上のリスク・アセットを削減できる点である。これにより自己資本比率を改善させることが可能となる。

発行体（特別目的事業体：SPV）は、ローリスクローリターンな商品からハイリスクハイリターンな商品まで、様々なリスク・リターン特性を持つ商品を投資家に提供する。このとき、CDO の発行体は、参照する債権の集合をいくつかのクラスに切り分け、そのクラスに支払い優先順位を設定する。この参照資産のクラスのことを資産を切り分けたものの 1 つという意味でトランシェ(tranche) という。さらにトランシェの中で支払い優先順位の高いものから順に大きくは 3 つに分けて、シニア、メザニン、エクイティという。その中でさらに切り分けられる。例えばメザニンが切り分けられる場合、シニア・メザニン、ジュニア・メザニンなどと呼ばれる。

CDO の発行体は、次のように支払い優先順位をトランシェに設定する。参照した資産内でデフォルトが起こる際に、優先順位の低い（信用が低い）トランシェから順に損失を分配する。つまり、デフォルトが発生した場合、最初は、エクイティ・トランシェの想定元本が減額されていき、次にジュニア・メザニンから減額されていく。この場合エクイティト・ランシェを購入していた投資家には元本が一切償還されず、ジュニア・メザニンを保有している投資家には想定元本が一部償還される。上位のトランシェ購入者には、想定元本がそのまま償還される。よって、支払い優先順位の低いトランシェが厚いほど上位トランシェの元本保証が高まることがわかる。このように CDO は、信用の高い上位トランシェの信用リスクを劣後するトランシェに移転する商品である。

CDO への投資理由

- 複数の資産からなるクレジット・ポートフォリオに投資が可能であること。
- 流動性が低く、流動性リスクが懸念されるが、社債と比べて利回りが高いこと。

- シニア、メザニンなどの上位トランシェに投資する者にとっては、優先劣後構造により信用リスクが高くても損失発生リスクがある程度軽減された投資を行えること。

2.1.3 SCDO

本小節では、SCDO に関する仕組みの概略を図を用いて説明する。まず最初に、

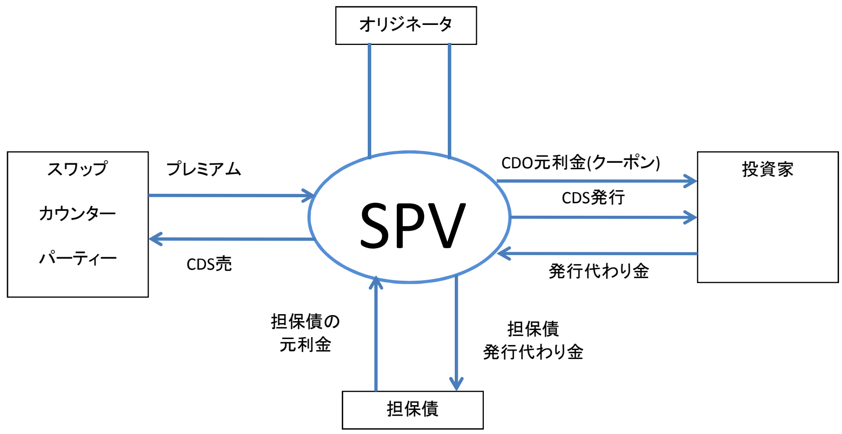


Figure 3: SCDO の取引図式

SPV(special purpose vehicle) が参照資産とする CDS のプロテクションをスワップ・カウンターパーティ[6]へ CDO の発行額以上売却し、CDO を発行する。そして発行した CDO の購入者である投資家から発行代わり金を受け取る。その後、CDO 発行代わり金で国債などの流動性が高く、信用力のある債券 (担保債) を購入する。発行後、SPV は、担保債の元利金と CDS のプレミアムを受け取る。そして、投資家に CDO の元利金を支払う。参照資産とした CDS にデフォルトが起きた場合、SPV は担保債を売却し、損失分のプロテクションをカウンターパーティに支払う。その時、CDO の元本が支払い優先度が低いトランシェから順に支払い相当額だけ減額される。

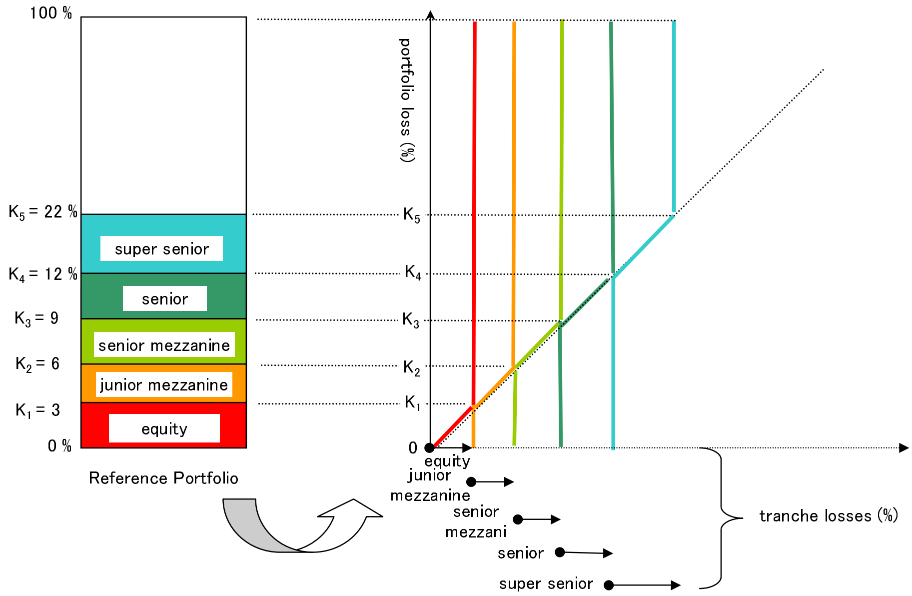
満期時には、SPV は、担保債を売却し、想定元本を投資家に償還する。参照資産にデフォルトが起こらなければ、投資家に元本が全額償還されるが、デフォルトが起きた場合想定元本の減額が発生し、投資家に全額償還されなくなる。

以上が SCDO に関する仕組みの概略である。投資家は、上述のように構成された SCDO に関して特定のトランシェだけを購入することが多い。その際、リスクが高いトランシェは、よりプレミアムが高くなることが自然である。これをシングル・トランシェSCDO という。このような特定のトランシェに関する CDO は、個々の投資家の嗜好でカスタマイズされた商品を扱う市場と、それより流動性が高い標準化された商品の市場がある。標準化された商品は、CDS 市場のインデックスを用いる。

[6]スワップ・カウンターパーティとは、スワップ取引を行う際の取引相手のことである。

CDS インデックスとは、流動性が高い主要な銘柄のバスケットのプレミアムである。欧州では iTraxx、米国では CDX などのインデックスがある。日本の CDS 市場には、iTraxx Japan[7]というインデックス市場がある。日本の場合は、流動性が高く、高投資適格を有する主要 50 銘柄のバスケットのプレミアムである。高投資適格だからといって、倒産しない保障があるわけではないことに注意する。このバスケットは、毎年 3 月と 9 月に構成銘柄が見直され新シリーズが投入される。新・旧シリーズの間で移行の際にスプレッド差が生じる場合がある。[8]インデックスの登場により、流動性が高まり、市場の動向が把握しやすくなった。インデックスを用いた CDO のトランシェの分類は、全体の損失の吸収する割合により下図のように分類されている。[9]

Figure 4: インデックス CDO のトランシェ分類



[7]図の参考 http://www.j-cds.com/jp/markit itraxx.html
[8]現在構成銘柄（シリーズ 12）については、http://www.markit.com/assets/en/docs/products/data/indices/credit-index-annexes/itraxx_japan_series_12.pdf.
[9]トランシェの分類図を参照。iTraxx Japan は iTraxx Europe と同じ分類、つまり, 0-3%、3-6%、6-9%、9-12%、12-22%（そして 22-100%）。一方、CDX は、0-3%、3-7%、7-10%、10-15%、15-30%（そして 30-100%）。iTraxx Europe と CDX は、iTraxx Japan とは異なり 125 銘柄のバスケットである。また、バスケットに含まれる銘柄の CDS のプレミアムは、たとえば以下で確認できる http://www.j-cds.com/jp/index.html のようになっている。

3 デフォルト相関

デフォルトの発生は、互いに独立や「相関がない」とは言えず、ある程度正の依存関係があると考えるのが自然である。この依存関係のことをデフォルト相関という。たとえば、少し過去の話になるが、2005 年 5 月頃、GMとフォードの信用格付けが低下し、CDS スプレッドが急上昇したことがあった。その際に、GMとフォードの CDS スプレッドの上昇に引っ張られるように日本の自動車業界の CDS スプレッドも急上昇する現象が見られた。この時期トヨタやホンダなどの日本の企業の業績は、好調でこれらの日系企業に CDS スプレッド上昇の原因となる理由が見られなかったことがある。

単純な問題設定の下で、CDS スプレッドの間に生ずる「相関」と資産価値の間に生ずる「相関」を数値シミュレーションにより比較してみると、相関が低い所では、CDS スプレッドの間に生ずる「相関」と資産価値の「相関」の差が大きく、全体としては、指数的な関係が見られた。この結果、CDS スプレッドの間に生ずる「相関」から参照資産に含まれる企業の資産価値過程の「相関」に関する情報を安易に得ることができない場合があることがわかる。詳しくは、数値シミュレーションの結果を参考にしていただきたい。

以上のことから「相関」をどのように理論的に設定するかは、重要な課題である。

4 CDS に関する数学的な問題

CDS に関する数学的な問題としては、以下のようなことがある：

1. CDS の適切なプレミアムはどのように理論的に決められるかという問題がある。上記の節の中でも触れたが、金融取引には、市場リスクや信用リスクなどのなんらかのリスクが常に存在する。これらのリスクを回避したいと考えるのは、自然な発想であり、デリバティブのニーズが高まった理由の一つでもある。デリバティブの売り手は、買い手が移転したいリスクに見合ったプレミアムを算出する必要がある。不当に高い価格で買わされたり、安すぎる価格で売却して引き受けるリスク以上のリスクを被る状況に陥らないようにするために数学的な理論による公正な価格付けが必要である。(注意: 現実問題として、皆が同じ価格で取引することは限らない。使用する数理モデルによって、また技術的な問題により売り値が異なることに注意する。)

2. 企業の信用リスクをどのようにモデル化するのが有効かという問題がある。どういう意味で「有効」というのか様々な見解があると思われるので注意する必要がある。実務では、シミュレーションの容易さなどの使いやすさが「有効」とみなされ使用するモデルが選ばれているように思われる。後述の節で簡単なモデルと一緒に説明するが、CDO のモデルを考える際には様々な問題を考慮する必要がある。例えば、企業間にある「相関」やファットテイル問題などがある。これらの問題をいかに数学的に理論化しモデルに組み入れるのかという研究が必要である。

3. 作成したモデルのパラメータをどのように推定するのが妥当かという問題がある。過去のどのデータを用いて推定するのか etc。

5　CDS の価格付け

本小節では、CDS の価格付けについて紹介する。CDS の価格付けとは、単純にいえば、あるプロテクションの購入者が、定期的にプロテクションの売り手に支払うプレミアムを決めることである。CDS の価格付けには、デリバティブの評価でよく用いられるリスク中立確率測度[10]を用いた方法が適用される。本小節では、簡単な例を挙げて CDS の価格付けの方法について説明する。今、満期で、にプレミアム の支払いが生じ、デフォルトが発生したら円を CDS の購入者に支払う CDS を考えるものとする。ここでは、デフォルト時における参照資産の回収率[11]である。簡単のため回収率 δ は、ランダムではない変数とする。一般にデフォルトが起きた場合、プロテクションの購入者は、参照資産をプロテクションの売り手に譲渡することになる。時刻をデフォルト時刻とする。後に説明するがデフォルト時刻は確率変数である。[12]つまりデフォルトの発生は、確定的な現象ではなく、ランダムな現象であると捉える。上述で説明したように、CDS プロテクションの購入者は、デフォルトが起きなければ、満期までプレミアム c を支払い、デフォルトが起きればデフォルト時刻 τ までプレミアム c を支払う。逆に CDS プロテクションの販売者は、参照資産にデフォルトが発生した場合、$1-\delta$ 円を CDS プロテクションの購入者に支払う。プロテクションの購入者と売却者の双方に不利がない公正な価格を決める必要がある。つまり、将来に発生する双方の支払いを現在価値に直したものがそれぞれ一致するようにプレミアムの価格を決める必要がある。ここで時刻 t_i における割引率 (discount rate) を $DR(t_i)$ で表すものとする。割引率は、安全資産 (長期の国債など、安全性の高い長期の債権のこと。) による運用手段によって将来の時刻に発生する利回りを、現在価値に割り引いたものとして、1 年あたりの割合 (パーセント) で表したものである。CDS プロテクションの購入者及び販売者の支払いについて、それぞれ上述の記号を用いて記述すると以下のようになる。

まず CDS プロテクションの購入者に将来発生する支払いの現在価値は、次のようになる：

$$(\text{プロテクションの購入者の現在価値}) = \sum_{i=1}^{N} E\left[cDR(t_i)1_{(\tau \geq t_i)}\right].$$

一方, CDS プロテクションの発行者の将来発生する支払いの現在価値は次のよう

---

[10] リスク中立確率測度とは、将来の各危険資産の割引価格の期待値が、初期価格と等しくなるような確率である。つまり一年後の危険資産の期待値が、安全資産で一年間運用した額と等しくなる確率のことである。これは、現実の観測確率とは異なる確率である。-田中さんこの概念を用いるためには、デフォルト・リスク商品を取引する市場が整備されており、「適切」とされる価格で売買が行われている必要がある。この擬似的な確率であるリスク中立確率を用いて評価する方法を、リスク中立化法やリスク中立評価法などと言う。なお、市場が無裁定であるとは、リスク無しで元手の資金無しに確実に正値のリターンが得られる機会が存在しない市場のことである。

[11] 回収率とは、もし参照資産にデフォルトが生じた場合、参照資産 (例えば, 債権) を清算し回収できる資産の割合のことである。

[12] 停止時刻の定義: $[0,\infty]$ に値をとる確率変数 τ が停止時刻であるとは、任意の $t \geq 0$ に対して、$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が成立するときを言う。ここで $\mathcal{F}_t$ は、時刻 t での情報量である。つまり停止時刻とは、$\{\tau \leq t\}$ という事象が時刻 t までの情報量 (filtration) にしかよらないことを意味する。イメージのため情報量という言葉を用いたが、これは数学的に適切ではないことに注意していただきたい。

になる：

$$(\text{プロテクションの発行者の現在価値}) = \sum_{i=1}^{N} E\left[(1-\delta)DR(t_i)(1_{(\tau \le t_i)} - 1_{(\tau \le t_{i-1})})\right].$$

よって公平なプレミアム c とは,

(プロテクションの購入者の現在価値) = (プロテクションの発行者の現在価値)

となる c を求めることである．すなわち、

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{N} E\left[(1-\delta)DR(t_i)(1_{(\tau \le t_i)} - 1_{(\tau \le t_{i-1})})\right]}{\sum_{i=1}^{N} E[DR(t_i)1_{(\tau \ge t_i)}]}$$

が求めたいプレミアムである。今、数学的な問題を分かり易くするために、割引率を確定的な割引率

$$DF(t_i) = e^{-rt_i}$$

と仮定する[13]。このとき,CDS の公平なプレミアム c は、

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{N}(1-\delta)e^{-rt_i}P(t_{i-1} \le \tau \le t_i)}{\sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i}P(\tau \ge t_i)} \tag{1}$$

となる。上記の式を見るとわかるようにリスク中立確率測度におけるデフォルト確率 $P(\tau \ge t_i)$, $i = 1...N$ と回収率 δ を決めれば、プレミアム c が決まる。上述の例では、簡単に説明するために回収率 δ と割引率 DF がランダムでないと仮定したが、これらのランダム性が与える影響を無視できないこともある[14]。クレジット・デリバティブの価格付けを行うには、デフォルト確率を求めと回収率のモデリングをし、評価する必要があることがわかる。上述の例では、特に我々は、デフォルト確率のシミュレーションの興味がある。

6　モデリング（既存のモデルの紹介）

本小節では、リスク中立確率測度の存在については仮定し、あるリスク中立確率測度 P が与えられているものとする。

デフォルトを表現するモデルには、構造モデルと誘導 (reduced-form) モデルという 2 つの主要なモデルがある。構造モデルは、債権や資産価格のような企業の構造変数の計算方法を用いる。あとに説明するマートンモデルは、デフォルトに関する最初の現代的なモデルであり、最初の構造モデルである。構造モデルは、企業の信用力や企業の状態、企業の財務状況に依存して与えられる。ゆえに外因的な要因よりも内因的な要因によりデフォルトが起こるという考えに従うモデル

[13]確定的な場合であっても一般に割引率は、期間構造を持つことに注意する。今の場合、デフォルト時刻 τ が $[t_{i-1}, t_i)$ の間に入ることがある。よって確定的な場合でも経過利子を考慮する必要があるが、ここでは触れない。

[14]ランダム性が与える影響を無視できないことの例？価格への影響などが分かる例を探す。回収率に関しては、モデルが定着しておらず、実際の返済の優先順位の問題やデータ不足問題がある。

である。一方、reduced-form(誘導) モデルは、デフォルトと企業価値の間の関係を考慮しない。構造モデルとは対照的に、reduced-form(誘導) モデルでのデフォルト時刻は、企業価値で決定されるのではなく、外因的に与えられたジャンプ過程（ポアソン過程、コックス過程など。）の最初に起こるジャンプによって決定される。ハザード率を統治するパラメータは、市場データから推定される。CDO のモデリングを考える際、複数の銘柄から CDO が構成されるので、参照資産のデフォルト時刻の同時分布を考える必要がある。よって、モデル化を行う際、デフォルト相関についても扱うべきである。さらに実際のデータに現れる現象として、デフォルト分布の裾の部分が正規分布の裾よりも太くなることが経験的なデータ分析の結果報告されている。このことをテイル（裾）が厚くなるということからファット・テイル現象[15]という。この現象についても考慮する必要がある。以下で、簡単にそれぞれのモデルについての簡単な説明や問題点について述べる。

6.1 Reduced-form(誘導) モデル

本小節では, Reduced-form(誘導) モデルについて紹介する．現在の時刻を $t = 0$ で表すものとする．$s(t)$ を時刻 0 から見て時刻 t で生存する確率とする．これを生存確率と呼ぶ. τ をデフォルト時刻とすると, 生存確率 $s(t)$ は,

$$s(t) = 1 - P(\tau \leq t) = P(\tau > t)$$

と表すことができる．デフォルトがある時刻 t まで発生していないとき、次の瞬間にデフォルトが起こる確率は,

$$\lambda_t = \lim_{h \searrow 0} \frac{P(\tau \leq t + h | \tau > t)}{h}$$

で表現される。これをデフォルト強度, もしくは、ハザード率とよぶ。このことから, reduced-form(誘導) モデルでは、次のように単純にデフォルト確率を表現することができる。

$$P(\tau \leq T | \tau > t) = 1 - s(t, T)$$

ここで, $s(t, T)$ は, 条件付生存確率とよばれるもので、

$$s(t, T) = P(\tau > T | \tau > t) = E[e^{-\int_t^T \lambda_s ds}]$$

と表現できる．上記のモデルを見るとわかるように reduced-form(強度) モデルでは、デフォルトが起こるメカニズムには、触れていないことがわかる。

6.1.1 Intensity(強度) モデル

本小節では, reduced-form(誘導) モデルの一つである Intensity(強度) モデルについて紹介する．企業のデフォルトがあるポアソン過程 N_t によりモデル化されているとする。Intensity(強度) モデルでは、デフォルト時刻は、与えられた intensity

[15]平均から極端に離れた事象の発生する確率が正規分布から予想される確率よりも高い現象。

（強度）に関するポアソン過程の最初のジャンプが起こる時刻であるから、デフォルト時刻 τ は、

$$\tau = \inf\{t > 0 | N_t > 0\}$$

と表される。このとき、ポアソン過程 N_t の強度を λ とすると、生存確率は,

$$s(t) = e^{-\lambda t}$$

と表現される。強度を確率過程 λ_t と考えることにより、より一般化することができる.(コックス過程など.) このとき, 生存確率は,

$$s(t) = E[e^{-\int_0^t \lambda_u du}]$$

と表現される。

6.2 1-ファクターコピュラモデル

1-ファクターコピュラモデルと呼ばれるデフォルト相関を考慮したモデルがある。今、n 個の銘柄を参照資産とする CDO を考える. $\tau_i, i = 1, ..., n$ を銘柄 i のデフォルト時刻とし, intensity λ_i の poisson 過程に従うものとする. 銘柄 i の状態をあらわす変数を平均 0, 分散 1 のある確率変数 X_i で表現する. このとき,

$$P(\tau_i < t) = P(X_i < x_i)$$

となるある定数 x_i が存在する。このとき, 銘柄 i の状態を表す確率変数 X_i がある境界 x_i を下回った時、時刻 t までに銘柄 i がデフォルトするということを意味している. 1-ファクターコピュラモデルでは, この状態を表す確率変数 X_i が 2 つの確率変数の和で

$$X_i = \rho_i M + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i, \qquad -1 \leq \rho_i \leq 1 \tag{2}$$

と表されている. ここで, 確率変数 M は, 市場の共通ファクターであり, 確率変数 Z_i が銘柄 i の固有ファクターである. このとき M と Z_i は, 互いに独立であり, さらに異なる銘柄 $i, j(i \neq j)$ に対して, 確率変数 Z_i, Z_j は互いに独立であるとする. このことから, $i \neq j$ のとき, 銘柄 i と銘柄 j の状態を表す確率変数 X_i, X_j の相関は, $\rho_i \rho_j$ である.

6.2.1 1-ファクターガウシアンコピュラモデル

サブプライム問題以前は、1-ファクターコピュラモデルの中でも、もっとも実務で用いられていた基本的なモデルであるガウシアンコピュラモデルについて, 本小節では説明を行う。ガウシアンコピュラは, 等式 2 の 2 つの確率変数 M, Z_i を標準正規分布に従う確率変数と考えたモデルである. このとき確率変数 τ_i の分布関数を F_i とすれば, F_i は, 狭義単調増加関数であり, $\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(X_i))$ となることに注意する. 状態変数 X_i の同時分布について考える. 任意の $i = 1, ..., n$ に対

して, 銘柄 i のデフォルト確率を考えると,

$$\begin{aligned}
P(\tau_i < t) = P(X_i < x_i) &= P\left(\rho_i M + \sqrt{1-\rho_i^2} Z_i < x_i\right) \\
&= P\left(Z_i < \frac{x_i - \rho_i M}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)
\end{aligned}$$

となる. ここで仮定より X_i が標準正規分布に従うことに注意する. よって, 標準正規分布の分布関数を Φ とすると,

$$\Phi(x_i) = P(X_i < x_i)$$

と表すことができる. このことから,

$$x_i = \Phi^{-1}(P(X_i < x_i)) = \Phi^{-1}(P(\tau_i < t))$$

と表すことができる. したがって, 銘柄 i のデフォルト確率は,

$$P(\tau_i < t) = P\left(Z_i < \frac{\Phi^{-1}(P(\tau_i < t)) - \rho_i M}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P(\tau_i < t)) - \rho_i M}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) \tag{3}$$

となる. 次に $M = m$ と条件付けた確率を考えると,

$$P(\tau_i < t | M = m) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P(\tau_i < t)) - \rho_i m}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)$$

となる. ここで, M と Z_i は, 互いに独立であり, さらに異なる銘柄 i, $j (i \neq j)$ に対して, 確率変数 Z_i, Z_j は互いに独立であることを思い出すと, デフォルト時刻 τ_i, $i = 1, ..., n$ の同時分布は,

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 < t_1, ..., \tau_n < t_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau_1 < t_1, ..., \tau_n < t_n | M = m)\phi(m)dm \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} P(\tau_i < t_i | M = m)\phi(m)dm \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(P(\tau_i < t_i)) - \rho_i m}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)\phi(m)dm
\end{aligned}$$

となる. ここで, 関数 ϕ は, 標準正規分布の確率密度関数である.
このように, 1-ファクターガウシアンコピュラモデルでは, デフォルト時刻の同時分布が単純な式で表現できる. さらに $P(\tau_i < t)$ を与えることにより, 被積分関数が解析的に計算できる。よって, デフォルト時刻の同時分布を求めるには, 変数 m に関する積分の数値計算を行うだけである. 以上がガウシアンコピュラモデルの簡単な説明である.

ガウシアンコピュラの問題点

デフォルトに関する現実のデータに現れる現象として、デフォルト分布の裾の部分が正規分布の裾の部分よりも太くなることが経験的なデータ分析の結果から報告されている。このことをテイル（裾）が厚くなるということからファットテイル[16]現象という。標準正規分布に従うガウシアンコピュラモデルでは, ファットテイル現象を表現できていないので、現実のデフォルトを表現するモデルとしては、不十分であると考えられる。このことについては、分布の裾を厚くするために, 標準確率分布に従う確率変数を用いず, 他の分布を用いる研究がされている．例えば、以下で説明する 1-ファクターダブル t コピュラモデルなどがある。

6.2.2　1-ファクターダブル t コピュラモデル

本小節では, 1-ファクターガウシアンコピュラモデルの自然な拡張の一つである 1-ファクターダブル t コピュラモデルについて間単に説明する．このモデルは, Hull 氏と White 氏により 2004 年に提案された方法である。
このモデルでは、標準正規分布の代わりに、より分布の裾が重い (ファットテイルな) 分布である標準化された（スチューデントの）t 分布（normalized Student's t distribution）[17]を適用するモデルである．つまり, 等式 2 の 2 つの確率変数 M, Z_i が以下のように標準化された（スチューデントの）t 分布を持つ確率変数と仮定したモデルである：

$$M = \sqrt{\frac{n_M - 2}{n_M}} T_{n_M}, \qquad T_{n_M} \sim \mathcal{T}(n_M)$$

$$Z_i = \sqrt{\frac{n_i - 2}{n_i}} T_{n_i}, \qquad T_{n_i} \sim \mathcal{T}(n_i)$$

ここで、$\mathcal{T}(n)$ は, 自由度 $n \geq 3$ の（スチューデントの）t 分布である。
このモデルでは, 確率変数 X_i が陽に表現できない．よって数値シミュレーションを行う必要がある.

コピュラモデルの問題点

コピュラモデルの問題点として、dynamic ではない点やパラメータのキャリブレーションが不安定である点などが挙げられる。

---

[16] 平均から極端に離れた事象の発生する確率が正規分布から予想される確率よりも高い現象。

[17] （スチューデントの）t 分布:
確率変数 Y,Z が次の条件を満たすものとする。
1)Z が標準正規分布に従う確率変数である。
2)Y が自由度 k のカイ 2 乗分布に従う確率変数である。
3) 確率変数 Y,Z が独立である。
今、確率変数 $t(k)$ を

$$t(k) = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

と定義する。このとき、確率変数 $t(k)$ が従う分布を自由度 k の t 分布という。

カイ 2 乗分布：
k を任意の自然数とする。$Y_1, ..., Y_k$ を互いに独立な標準正規分布に従う確率変数とする。今, 確率変数 $\mathcal{X}^2(k)$ を

$$\mathcal{X}^2(k) = Y_1^2 + \cdots + Y_k^2$$

と定義する．このとき、確率変数 $\mathcal{X}^2(k)$ が従う分布を自由度 k のカイ 2 乗分布という。

6.3 Structural model

ここでは, 上記で説明したモデルよりデフォルトの特徴を考察することが可能である構造モデルについての簡単な説明を行う. n 個の銘柄を参照資産とする CDO を考える. 企業 i, $i = 1, ..., n$ の企業価値が確率微分方程式

$$dV_t^i = \mu_i V_t^i dt + \sigma_i V_t^i dX_t^i$$

で表現されているとする. ここで, μ_i は, 企業 i の企業価値の期待成長率を表すパラメータであり, σ_i が企業 i のボラティリティ, つまり企業価値の変動の激しさを表すパラメータである. さらに, 第二項は, ノイズ項であり, X^i は, ブラウン運動 (ホワイトノイズ)[18]に従うとする. このとき, 確率微分方程式は, 陽に解を持ち,

$$V_t^i = \exp\left((\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i X_t^i \right)$$

となる. このように構造モデルでは、企業の価値をモデル化している。
注意: 構造モデルでは, 株価過程から構成されるアセット測度, リスク中立測度, 実測度の 3 つの測度による評価がそれぞれ考えられる。

6.3.1 マートン モデル

本小節では、マートンモデルについて説明する。各企業は, 時刻 t で清算するものと仮定し, 企業 i に対するデフォルト境界を B_i で表すものとする. つまり, 企業価値 V_t^i が境界 B_i を下回ったときデフォルトと定義する. ($X_0^i = 0$ としても一般性は失わない.) ブラウン運動 X^i は, $logV^i$ に伊藤の公式を用いることにより,

$$X_t^i = \frac{\log V_t^i - \log V_0^i - (\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t}{\sigma_i \sqrt{t}}$$

と表すことができる. そして, $\tilde{B}_i$ を

$$\tilde{B}_i(t) = \frac{\log B_i - \log V_0^i - (\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})}{\sigma_i \sqrt{t}}$$

とすると, 企業価値 V_t^i が境界 B_i を下回ることは, ブラウン運動 X^i が $\tilde{B}_i$ を下回ることと同値である. すなわち, ブラウン運動 X^i が $\tilde{B}_i$ を下回ったときデフォルトが発生すると言い換えることができる. これにより, 時刻 t での企業 i のデフォルト確率は,

$$P(V_t^i < B_i) = p(X_t^i < \tilde{B}_i(t)) = \Phi(\tilde{B}_i)$$

と表現できる.

マートンモデルの問題点としては, 満期 T 以前に資産価値が低下してもデフォルトしない状況が起こりうることである. 満期が異なる複数の債権を扱った場合, 過去に倒産した企業がその後生存している状況が起こりうる. 過程が強く現実的な動きをしているとは言えない場合がある.

[18]ブラウン運動:Wikipedia 参照。

6.3.2 ブラック-コックス モデル

ブラック-コックスモデルでは, マートンモデルでの問題点を改善するために, 企業 i のデフォルトが

$$\tau_i = \inf\{t; V_t^i < B_i\}$$

で起こるものとする. これは, B_i を下回った最初の時刻でデフォルトが発生するということを意味している. マートンモデルより明らかに取り扱いが難しいモデルとなっているが, デフォルトに関する意味が直感的にも経済的にも理解しやすいモデルである.

6.3.3 構造モデルの数値計算

構造モデルは, モンテカルロシミュレーションによって, 実行される. つまり, 高次元確率微分方程式に関するシミュレーションの問題がある. さらに流動性の問題から CDS スプレッドがジャンプする場合があり, ジャンプも考慮したモデルを考え, デフォルト発生のメカニズムを考察できるモデルにするべきであるが, キャリブレーションの問題として, ジャンプ過程 (Lévy 過程) として何を採用すべきか, どのようなリスク中立確率測度を採用すべきかを検討する必要がある. もちろん, 高次元ジャンプ型確率微分方程式に関するシミュレーションの問題もある.

7 各モデルとデフォルト相関

本節では, 各モデルにおけるデフォルト相関について記す。

7.1 Intensity モデルにおけるデフォルト相関

デフォルト相関に関しては, 各参照資産の intensity λ_i を定める際に考慮することになる.

7.2 ガウシアンコピュラモデルにおけるデフォルト相関

ガウシアンコピュラモデルでは, 等式 2 を見ていただければ、相関がモデルに組み込まれていることがわかる。
実際にこのモデルを使用する場合に用いられることのある相関の 1 つに、各企業間の相関を一律としたインプライド相関と呼ばれるものがある. この相関は, 現在の CDS 価格と等式 (3) を下にキャリブレーションを行い定めたものである。

7.3 構造モデルにおけるデフォルト相関

デフォルト相関をモデル化するために, 各企業のノイズであるブラウン運動を次のような 2 つの要素に分ける. 任意の i, $i = 1, ..., n$ に対して, ブラウン運動 X^i を市場全体などのノイズである共通のファクター M と企業 i 固有のファクター Z^i を用いて

$$dX_t^i = \rho_i(t) dM_t + \sqrt{1 - \rho_i^2(t)} dZ_t^i, \qquad 0 \le \rho_i(t) \le 1$$

と表す．ここで, M と Z_i は, ブラウン運動であり, 無相関である．さらに, $i \neq j$ に対して, Z_i と Z_j は, 互いに無相関である．

8 キャリブレーション (calibration)

キャリブレーション (calibration) とは, 理論モデルによって計算された価格を対応する現実の市場データと比較して, マーケットに整合的なパラメータを推定する方法である．

8.1 Intensity モデルと CDS 価格

CDS プレミアムの算出式 (1) と合わせて考えると,

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{N}(1-\delta)e^{-rt_i}s(0,t_{i-1})\,(1-s(t_{i-1},t_i))}{\sum_{i=1}^{N}e^{-rt_i}s(0,t_i)}$$

となる．これより, intensity λ を CDS 価格などのマーケット情報に会うようにキャリブレーションを行い推定することになる．intensity に影響を与える要因としては, 格付け, 財務状態, 株価, 社債, 金利, 景気など様々な要因が考えられる．λ について上記のことを考慮してパラメータ推定を行う場合, Affine Intensity モデルや CIR モデルといった確率モデルが良く使われている．intensity(強度) モデルは、市場価格に合わせてキャリブレーションがすばやくできるため実務で使用されることがある．しかし, 多くのパラメータをキャリブレーションなどによって推定することに問題がないとは言えず, このモデルによるデフォルト確率のシミュレーションが本当に適正かどうかということについては, 疑問が残る。

8.2 ガウシアンコピュラモデルと CDS 価格

Intensity(強度) モデルと同様に, $P(\tau_i < t)$ については, intensityλ_i をマーケットなどの情報に合うようにキャリブレーションを行い推定することとなる．

8.3 Black-Cox モデルと CDS 価格

別稿「Black-Cox モデルとジャンプ過程についてのいくつかの考察」を参照。

9 モデルの考察

本小節では, 数値シミュレーションによって得られた結果について簡単に紹介する．詳しくは, 数値シミュレーションの項目を参考していただきたい．

9.1 構造モデルと Intensity モデル

デフォルト確率の期間構造を見てみると, 強度モデルに比べると強度モデルは, 出発時刻の近傍でのデフォルトがほぼ起こらない結果となった．これは, 少し現実とは合わないように思える．

9.2 Merton モデルと Black-Cox モデル

相関と倒産件数が全体の 0-3%,7-10%, そして 15-30%となる確率との関係をそれぞれ比較した. 0-3%及び 15-30%の時は相関が大きくなれば, 確率が増加したが, 7-10%については, 単調性が見られなかった. Merton モデルと Black-Cox モデルともにほぼ同じ確率と相関の関係となった.

9.3 Black-Cox モデルにおける資産価値過程の相関と CDS 価格の相関

CDS スプレッドの間に生ずる「相関」と資産価値の間に生ずる「相関」を数値シミュレーションにより比較してみると, 互いの相関が低い所では, CDS スプレッドの間に生ずる「相関」と資産価値の「相関」の差が大きく, 全体としては, 指数的な関係が見られた. この結果, CDS スプレッドの間に生ずる「相関」から参照資産に含まれる企業の資産価値過程の「相関」に関する情報を安易に得ることができない場合があることがわかる.

10 研究課題

上述では, 今まで研究されていることや、企業で使用されているモデルについて紹介した。そしていくつかの問題点も指摘してきた。実際の市場では, 流動性の問題により、スプレッドの動きがジャンプすることが多く見受けられる。これのため我々はジャンプを考慮したモデル (つまり, ジャンプ型の確率微分方程式) を扱う必要がある. 一般にデフォルトの分布は、裾が厚くなる現象が見受けられることがわかっている。（分布のテールが正規分布より太いことが良く報告されている。）この現象（ファットテイル）についてもジャンプを考慮したモデルを考えることによって説明できるのではないかという意見が自然である。よって、我々は高次元ジャンプ型確率微分方程式を扱ってモデリングする. しかしながら高次元ジャンプ型確率微分方程式をシミュレーションすることは、容易ではない。特にファイナンスで扱われているジャンプ過程は、微小のジャンプが無限に起こる確率過程であるからである。さらに上述で説明したように企業間にはなんらかの相関があり、その相関についても考慮したシミュレーションが必要になる。

10.1 リスク管理との関係

リスク管理面では, デフォルト確率が Standard and Poors や Moody ’s などの格付け会社により評価されている。ただし、デフォルトが発生する時間に関する情報は公表されていない。これらは、ＣＤＯの評価をする際、通常使われていないと仮定されているが、できれば構造モデルとの兼ね合いを評価したい。

10.2 数学的な問題

数学的な問題としては、次のようなことがある. 連続確率微分方程式に対するシミュレーションには、オイラー丸山法がよく用いられるが、これでは収束のオーダーが良くない。よって我々は、より良い収束のオーダーを得るために楠岡近似と呼ばれる方法をもちいてシミュレーションをする。しかし、高次元確率微分方程

式に関して、この近似方法を用いた数学的な評価があまり研究されていない。したがって、これに対する数学的評価を与える前に、楠岡近似を用いたシミュレーションを行い、その結果を検討する必要がある。さらに理論的な展開として次元を落とす方法を提案する。そのために作用素分解法と呼ばれる手法を用い、高次元確率微分方程式の代わりに合成作用素を扱うことによりシミュレーションの効率化を図る。ただし先行研究では分割を確定的な時間刻みでとっているのに対し、CDS の設定ではランダムな停止時間が絡むことから、この方法を拡張する必要がある。このため, 作用素分解法を再構成する。この再構成した表現は、CDS の問題だけではなく、より一般的な枠組みで種々の応用が期待できる. その応用についても検討する. さらに信用リスクの問題では、ジャンプ型確率微分方程式を扱う必要があり、これに関するシミュレーションについても深く研究を行う。特に数理ファイナンスで扱うジャンプを考慮したモデルでは、微小のジャンプが無限に起こる可能性が存在し、シミュレーションの面では、非常に難しい問題である。極端な話として安定過程と呼ばれるジャンプ過程では、モーメントがなく、近似が非常に難しい。Tempered 安定過程と呼ばれるモーメントが存在する過程であっても小さいジャンプの数が多く、扱いにくい。よって、様々な近似方法を考案するべきである。また、様々なシミュレーションを行い、その精度を比較検討すべきである。例えば、importance sampling をどう行うか、時間の刻みをランダムにするかどうか、などを検討する。

10.3 商品分類

たとえば Credit Default Swap, First to Default, Default Digital Swap Asset swaption, Basket default swap, Collateralized debt obligation などの商品について情報を収集し、数学的側面、経済学的側面、データ解析的側面における問題を提起し, 解析を行う。

10.4 ボラティリティ推定・リスク評価

構造モデルを評価するために、株価を企業価値の proxy と考えて、株価過程に対する確率微分方程式モデルの未知パラメータの推定やモデル評価を行うことは、リスク管理上、非常に重要である。そこで仕組商品に対する統計的アプローチのための基礎理論の整備として、確率微分方程式モデルの情報量規準の構成のための統計的パラメータ推測理論、特に、ボラティリティパラメータ推定理論の整備を行う。また、ボラティリティ推定によるリスク評価をおこなうために、高頻度観測データに含まれるマイクロストラクチャー・ノイズに頑健なボラティリティ推定法に関する研究をおこなう。さらに、派生商品価格からの状態価格密度の推測理論を整備する。

10.4.1 漸近展開について

摂動項を含む高次元確率微分方程式の解の汎関数の期待値を評価する方法として、マルチンゲール展開（吉田の公式）の適用可能性を探る。摂動項の構造と分布の漸近挙動との関わりを解析し、また　Fat tail 現象や市場からインプライされるボラティリティ構造を再現するように摂動項をモデリングする。

10.4.2 データ整備について

企業の株価を企業価値の proxy として、構造モデルの実証分析を行うため、企業の株価ティックデータを購入し、高頻度データとしての整備を行う。

References

[1] 松原 望, 縄田 和満, 中井 検裕 (1991). 統計学入門,

[2] 室町 幸雄 (2007). 信用リスク計測と *CDO* の価格付け,

[3] A.Elizalde (2005). *Credit Risk Models IV: Understanding and pricing CDOs*,

[4] J.aHull, A.White (2004). *Valuation of a CDO and nth to default CDS without Monte Carlo simulation*, The Journal of Derivatives, vol 2, pp 8-23.

[5] D.Wang, S.T.Rachev, F.J.Fabozzi (2006). *Pricing Tranches of a CDO and a CDS Index: Recent Advances and Future Research*,